

## IMPEDANCIA DE PUESTA A TIERRA

Néstor S. Mamani Villca

### Resumen

En el presente trabajo se aborda el tema de la respuesta de un sistema de puesta a tierra a potenciales de alta frecuencia y potenciales de impulso, donde se debe tomar en cuenta la impedancia del sistema tierra, constituido por un circuito equivalente RLC, se hace el análisis con las ecuaciones de Maxwell y las transformadas de La Place para de esa forma conocer la corriente de descarga y su comportamiento. Se hace una aplicación sencilla a dos casos, el primero para una varilla y el segundo para malla cuadrada.

### 1. Introducción

En el diseño de sistemas de tierra se acostumbra a utilizar el término resistencia de puesta a tierra, esto es correcto para el funcionamiento en corriente directa o a frecuencia industrial, sin embargo para frecuencias muy altas, frentes de pulso o impulso, el término correcto es impedancia. Esto implica que se debe definir el circuito equivalente del sistema de tierra. Se hace notar que a frecuencia industrial de 50 Hz, aún se puede usar el término de resistencia ya que los efectos inductivos y capacitivos son despreciables, como se demostrará.

El presente análisis podría ser útil en la determinación de la corriente de descarga real probable en el diseño de pararrayos para proteger edificios, el cálculo los sistemas de tierra de las torres de las líneas de transmisión, y puesta a tierra de las torres de terminales y repetidoras de sistemas de telecomunicaciones.

### 2. Fundamento teórico

#### 2.1. Capacitancia de mallas de tierra

La tierra no es un conductor perfecto, presenta una constante dieléctrica y una resistividad. Para evaluar la capacitancia se considera una esfera cargada de radio  $R$  con una carga  $Q$ , sumergida en tierra de resistividad  $\rho$  y constante dieléctrica  $\epsilon_r$ . Asumiendo que el suelo es uniforme, entonces las superficies equipotenciales serán esferas concéntricas, como se muestra en la figura 1 y mediante la ley de Gauss:

$$\iint_{\text{Esfera}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon} \quad (1)$$

$$E = \frac{Q}{\epsilon 4\pi r^2} \quad (2)$$

El voltaje entre la esfera de radio  $r$  y  $r \rightarrow \infty$  cuando el potencial es cero (tierra infinita), se obtiene de la gradiente del potencial:  $\vec{E} = -\nabla V$  (3)

$$\text{De otra forma: } E = -\frac{dV}{dr} \therefore dV = -E dr \quad (4)$$

$$\text{Remplazando: } V = -\int_{\infty}^r \frac{Q}{\epsilon 4\pi r^2} dr \quad (5)$$

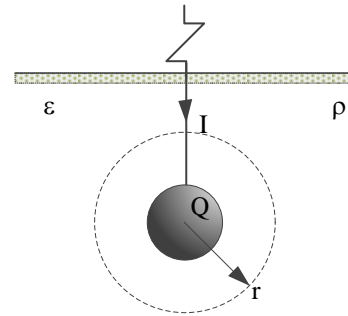


Figura 1. Esfera conductora enterrada

$$\text{Integrando: } V = \frac{Q}{\epsilon 4\pi r} \quad (6)$$

La capacitancia entre la esfera y tierra infinita, se define por:

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi r \epsilon \quad (7)$$

Dónde:  $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ , es la permitividad del suelo., del vacío y la permitividad relativa o constante dieléctrica.

Para evaluar la resistencia de puesta a tierra inyecta una corriente  $I$ , y está fluye de la esfera hacia tierra alrededor, la densidad de corriente a una distancia  $r$ , es:

$$J = \frac{I}{4\pi r^2} = \frac{E}{\rho} \quad (8)$$

Del cual, el campo magnético es:

$$E = \frac{I\rho}{4\pi r^2} \quad (9)$$

El voltaje entre la esfera y tierra infinita (potencial cero), es:

$$V = -\int_{\infty}^r \frac{I\rho}{4\pi r^2} dr = I \frac{\rho}{4\pi r} \quad (10)$$

Entonces la resistencia de puesta a tierra de la esfera, es:

$$R = \frac{V}{I} = \frac{\rho}{4\pi r} \quad (11)$$

El producto de (7) y (11), da:

$$RC = \varepsilon\rho \quad (12)$$

Esta consecuencia esta relación es básica para determinar la capacidad de un sistema de tierra a partir del conocimiento de parámetros de campo como la resistividad y permitividad del suelo.

## 2.2. Circuito equivalente a la frecuencia industrial

A partir de las ecuaciones de Maxwell, y despreciando la inductancia, se analiza a continuación, el comportamiento de un sistema de tierra frente a una perturbación senoidal, la densidad de corriente se representa por:

$$\mathbf{J} = \frac{\mathbf{E}(t)}{\rho} + \varepsilon \frac{d\mathbf{E}(t)}{dt} \quad (13)$$

El campo eléctrico presenta la forma:  $\mathbf{E}(t) = Ee^{j\omega t}$

Que remplazado en (13), resulta:

$$\mathbf{J} = \frac{\mathbf{E}(t)}{\rho} + \varepsilon j\omega\mathbf{E}(t)$$

El campo eléctrico es: 
$$\mathbf{E}(t) = \frac{\mathbf{J}}{\frac{1}{\rho} + j\varepsilon\omega} \quad (14)$$

O también: 
$$\mathbf{E}(t) = \frac{\mathbf{I}}{2\pi r^2 \left( \frac{1}{\rho} + j\varepsilon\omega \right)} \quad (15)$$

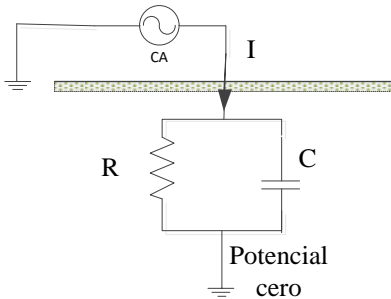
El potencial se obtiene de la gradiente:

$$\mathbf{V} = -\int_{\infty}^r \mathbf{E}(t) dr = \frac{\mathbf{I}}{2\pi r \left( \frac{1}{\rho} + j\varepsilon\omega \right)} \quad (16)$$

La admitancia se define como:

$$\mathbf{Y} = \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{V}} = 2\pi r \left( \frac{1}{\rho} + j\varepsilon\omega \right) \quad (17)$$

Que se representa por el circuito de la figura 2.



**Figura 2.** Circuito equivalente frente a una entrada senoidal

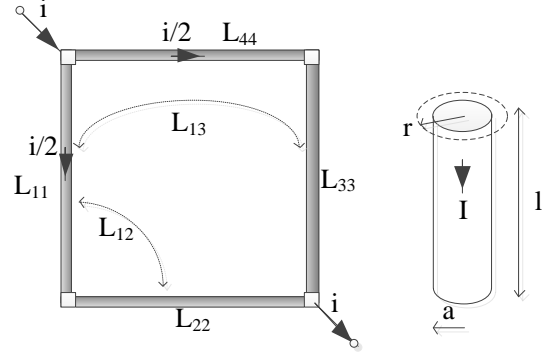
Es evidente que “ $\varepsilon\omega$ ” =  $8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 9 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 50 = 2.5 \cdot 10^{-8}$  es despreciable frente a “ $1/\rho$ ” =  $1/100 = 1 \cdot 10^{-2}$  (tomando valores típicos) a la frecuencia industrial, por tanto el

circuito equivalente se puede considerar una **resistencia pura**, de puesta a tierra.

## 2.3. Autoinductancia e inductancia mutua

Sea una malla de cuatro conductores de longitud  $l$ , y radio  $a$ , como se muestra en la figura 3. El coeficiente de autoinductancia para una sección de conductor, se determina por:

$$L_{11} = \frac{\Phi}{I} \quad (18)$$



**Figura 3.** Malla de tierra

La inducción magnética se evalúa de la ley de Ampere:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_o i_{net} a}{2\pi r} \quad (19)$$

El flujo magnético está dado por:

$$\Phi = \iint \bar{\mathbf{B}} \cdot d\bar{\mathbf{A}} = \int_0^a \frac{\mu_o I}{2\pi r} \frac{r^2}{a^2} l dr + \int_a^l \frac{\mu_o I}{2\pi r} l dr \quad (20)$$

Integrando y remplazado en (18), se tiene:

$$L_{11} = \frac{\mu_o l}{2\pi} \left( \frac{1}{2} + \ln \frac{l}{a} \right) \quad (21)$$

Rescribiendo la expresión:

$$L_{11} = 2 l \ln \left( \frac{1.65 l}{a} \right) 10^{-7} \quad (22)$$

Bajo el mismo procedimiento, se evalúa la inductancia mutua:

$$L_{13} = \frac{1}{l} \int_1^{2l} \frac{\mu_o I}{2\pi r} l dr = 2 l \ln(2) 10^{-7} \quad (23)$$

La inductancia mutua  $L_{12} = 0$ , debido a que los flujos no se concatenan, los conductores son perpendiculares.

A continuación se determina la inductancia equivalente del arreglo cuadrado mostrado en la figura 3, de conductores de longitud  $l$ , enterrados en el suelo. Se debe tomar en cuenta que:  $L_{11} = L_{22} = L_{33} = L_{44}$ ,  $L_{12} = L_{14} = 0$  y  $L_{13} = L_{24}$ .

$$v = L_{11} \frac{d(i/2)}{dt} + L_{13} \frac{d(i/2)}{dt} + L_{22} \frac{d(i/2)}{dt} + L_{24} \frac{d(i/2)}{dt}$$

$$v = (L_{11} + L_{13}) \frac{di}{dt} \quad (24)$$

La inductancia equivalente está dado por:

$$L_e = L_{11} + L_{13}$$

Como se habrá notado, la corriente  $i$  en la figura 3, no sólo circula por el conductor, también fluye hacia la tierra que rodea al conductor, esta situación se analizó ampliamente en [2], que recomienda afectar a la inductancia equivalente por el factor de  $1/3$ .

$$L = \frac{1}{3}(L_{11} + L_{13}) \quad (25)$$

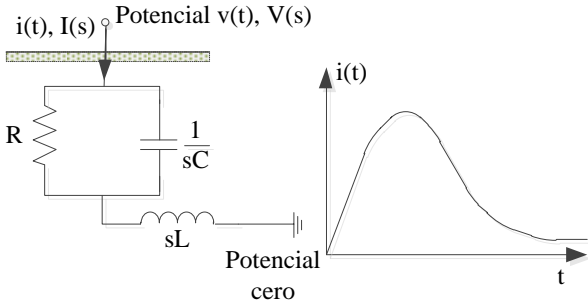
$$L = \frac{2}{3} 11 \ln \left( 2 \frac{1.651}{a} \right) \quad (25)$$

#### 2.4. Respuesta a la descarga atmosférica

El modelo matemático de la onda de descarga de corriente es una doble exponencial, dado por:

$$i(t) = I(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}) \quad (27)$$

En la figura 4, se muestra la onda de corriente y el circuito equivalente:



**Figura 4.** Circuito equivalente frente a un impulso

El voltaje aplicado al circuito equivalente del sistema de tierra, está dado por:

$$V(s) = sLI(s) + I(s) \left( R // \frac{1}{sC} \right) \quad (28)$$

La transformada de la corriente  $i(t)$  es:

$$I(s) = I \left( \frac{1}{s + \alpha} - \frac{1}{s + \beta} \right)$$

Remplazado en (28) y ordenando, resulta:

$$V(s) = I \left( \frac{1}{s + \alpha} - \frac{1}{s + \beta} \right) \left( sL + \frac{1}{\frac{1}{R} + sC} \right) \quad (29)$$

Ordenando:

$$V(s) = I \left[ \frac{\frac{1}{C}}{(s + \alpha)(s + \frac{1}{RC})} - \frac{\frac{1}{C}}{(s + \alpha)(s + \frac{1}{RC})} + sL \left( \frac{1}{s + \alpha} - \frac{1}{s + \beta} \right) \right]$$

Mediante fracciones parciales y aplicando la anti-transformada de La Place, se tiene:

$$v(t) = I \frac{\frac{1}{C}}{\frac{1}{RC} - \alpha} \left( e^{-\alpha t} - e^{-\frac{t}{RC}} \right) - I \frac{\frac{1}{C}}{\frac{1}{RC} - \beta} \left( e^{-\beta t} + e^{-\frac{t}{RC}} \right) + I \left( \beta e^{-\beta t} - \alpha e^{-\alpha t} \right)$$

$$v(t) = I \left[ \frac{R \left( e^{-\alpha t} - e^{-\frac{t}{RC}} \right)}{1 - \alpha RC} - \frac{R \left( e^{-\beta t} - e^{-\frac{t}{RC}} \right)}{1 - \beta RC} + L \left( \beta e^{-\beta t} - \alpha e^{-\alpha t} \right) \right]$$

La impedancia de puesta a tierra se define como:

$$z = \frac{R}{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}} \left[ \frac{\left( e^{-\alpha t} - e^{-\frac{t}{RC}} \right)}{1 - \alpha RC} - \frac{\left( e^{-\beta t} - e^{-\frac{t}{RC}} \right)}{1 - \beta RC} + \frac{L}{R} \left( \beta e^{-\beta t} - \alpha e^{-\alpha t} \right) \right] \quad (30)$$

### 3. Aplicación

- a) Para una varilla de cobre de 10 mm de diámetro y longitud de 2 m. enterrada en un medio de resistividad uniforme de  $100 \Omega\cdot m$ , con permitividad relativa de 9, se determinará la impedancia de puesta a tierra.

La resistencia de puesta a tierra, se determina de:

$$R = \frac{\rho}{2\pi l} \ln \left( \frac{2l}{a} \right) = \frac{100}{2\pi \cdot 2} \ln \left( \frac{2 \cdot 2}{5/1000} \right) = 5319 \Omega$$

Del producto (12),  $RC = \epsilon \rho = 8.85 \times 10^{-12} \times 9 \times 100 = 7,96 \text{ ns}$

La inductancia está dada por (21)

$$L = \frac{2}{3} 11 \ln \left( \frac{1.651}{a} \right) 10^{-7} = \frac{2}{3} \times 21 \ln \left( \frac{1.65 \times 2}{5/1000} \right) 10^{-7} = 865 \text{ nH}$$

Para la onda de impulso se toman los valores de  $\alpha = 125 \times 10^3$  y  $\beta = 1 \times 10^6$ , que se muestra en la figura 5.

Con estos valores remplazados en la fórmula (30) y para un tiempo de  $t = 1.2 \text{ [us]}$ , se obtiene:

$$z = 53.25 \Omega$$

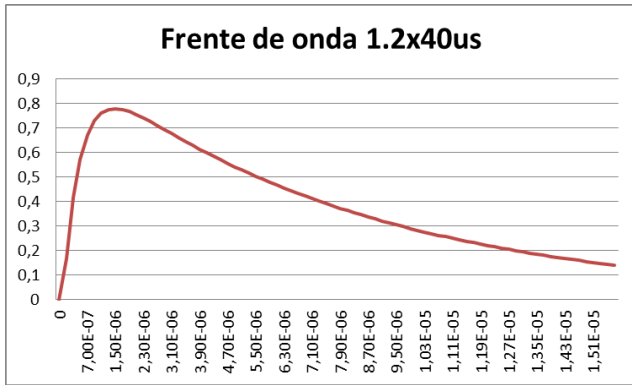
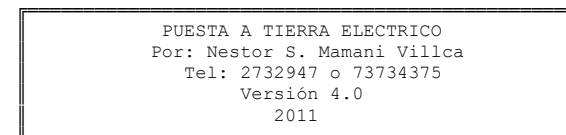


Figura 5. Impulso normalizado

- b) Para un malla cuadrada de 4 conductores de lado 6 m y diámetro de 10 mm, enterrados en suelo uniforme de resistividad 100  $\Omega$ -m, de permitividad relativa 9, se determina la impedancia de puesta tierra.

La resistencia de puesta a tierra, se determina del programa AARON:



```

MODELO DE SUELO DE DOS CAPAS           : [1]
DISEÑO DE MALLA PARA REPETIDORAS       : [2]
CORRIENTE DE FALLA DE MALLA           : [3]
DISEÑO DE MALLA PARA SUBESTACION      : [4]
RESISTENCIA DE PUESTA A TIERRA        : [5]
PERFILES DE POTENCIAL                  : [6]
SALIR                                  : [S]
                                         :5
PARAMETROS DEL SUELO

RESISTIVIDAD DE CAPA SUPERIOR, en Ohm-m : ? 100
RESISTIVIDAD DE CAPA INFERIOR, en Ohm-m : ? 100
ESPESOR DE CAPA SUPERIOR, en m         : ? 1

TIPO DE SISTEMA DE PUESTA A TIERRA
-----
MALLA CON RADIALES Y JABALINAS        1
MALLA SIN RADIALES Y JABALINAS        2
JABALINAS EN LINEA                    3
JABALINAS EN RADIAL                   4
CAMBIO DE PARAMETROS DEL SUELO        5

DATOS DE ENTRADA
-----
Longitud del lado menor, en m          : ? 6
Longitud del lado mayor, en m          : ? 6
Número de conductores lado mayor       : ? 2
Número de conductores lado menor       : ? 2
Número de jabalinas.                   : ? 0
Enterramiento de malla, en m           : ? 0.6
Diámetro del cable de malla, en mm     : 10

RESISTENCIA DE PUESTA A TIERRA : 11.04 ± 1.43 Ohm
-----
Método                               Calculado
LAURENT-NIEMANN                       11.55
LAURENT-NIEMANN mejorado               11.55

```

NAHMAN-SKULETICH	13
SVERAK	10.46
SCHWARZ	8.68

La resistencia de puesta a tierra resulta,  $R = 11.04 \Omega$

Del producto (12),  $RC = \epsilon\rho = 7,96 \text{ ns}$

La inductancia está dada por (21)

$$L = \frac{2}{3} \ln\left(2 \frac{1.65l}{a}\right) = 2.87 \text{ uH}$$

Para la onda de impulso normalizada y con estos valores remplazados en la fórmula (30), para un tiempo de  $t=1.2$  [us], se obtiene:

$$z = 10.69 \Omega$$

#### 4. Conclusiones

- Mediante las ecuaciones de Maxwell, se han modelado los circuitos equivalentes de sistemas de tierra que están sometidos a un frente de onda normalizado.
- Para frecuencia industrial, se ha probado que el comportamiento del sistema de tierra tiene un comportamiento de resistencia pura.
- Con las consideraciones mostradas, resulta sencillo, determinar la capacitancia del circuito equivalente y más aún será necesario conocer la constante de tiempo RC que es equivalente a al producto  $\rho\epsilon$ , que se puede conocer por mediciones indirectas.
- La inductancia es un parámetro que puede ser determinado por análisis circuital, pero se debe tomar en cuenta la fuga de corriente a través de la tierra que rodea al conductor, este efecto ampliamente estudiado contribuye en reducir la inductancia equivalente a una tercera parte.
- La impedancia frente a una onda de impulso, puede resultar menor a la resistencia de puesta a tierra, provocando una mayor circulación de corriente de descarga. Su conocimiento es importante al momento de considerarla protección de los equipos y la seguridad del personal, por los potenciales peligrosos que aparecen en el instante de la descarga.

#### 5. Bibliografía

- [1] Néstor S. Mamani Villca. *Manual para el diseño de sistemas de puesta a tierra*, PROGRAMA FAD-ENTEL, 1993.
- [2] Vainer, A. L. y Floru, V. N. *“Experimental Study and Method of Calculation of the*

- Impulse Characteristics of Dep Hearthing*”, USSR Elektrichetvo, No 5 18-22 1971, pp. 79-90.
- [3] R. P. Webb, E. B. Joy , *Analysis of grounding systems*, IEEE Power Apparatus and Systems, 1981, A. P. Meliopoulos,.
- [4] F. Dawalibi, D. Mukhedkar, *Influence of ground rods on grounding grids*, IEEE PAS 1979.
- [5] Geraldo Kindermann, *Aterramento Eléctrico*, Brasil 1995,
- [6] J. J. Martinez Requena, J. C. Toledino Gasca, *Puesta a tierra en edificios y en instalaciones eléctricas*, Paraninfo, segunda edición, 1998

### Néstor S. Mamani Villca



Realizó estudios en la Facultad de Ingeniería, UMSA, donde se graduó como Ingeniero Electricista, realizó estudios de Post Grado en Sistemas de Control en la UMSA, donde se graduó como Maestro en Ciencias, hizo diplomados en: Gestión del Proceso de Enseñanza Aprendizaje en Educación Superior Universitaria, Educación Ambiental Industrial, Gestión de la Vinculación Tecnológica, Proyectista autorizado en Instalaciones de Gas Domiciliarios, Multifamiliares e Industriales, INFOCAL.

Ha ejercido la Cátedra en la Universidad Mayor de San Andrés y Docencia en la Escuela Industrial Superior Pedro Domingo Murillo. Ha ejercido el cargo de supervisor en el programa FAD-ENTEL, ha realizado proyectos en sistemas de tierra en general y protección catódica para estaciones de servicio de GNV, redes de distribución, cubicales de control y protección de líneas de transmisión en ENDE, instalaciones eléctricas domiciliarias industriales y edificios, fue Director de la carrera de Electricidad, UMSA.